

ゼラチンゼリーを使った光弾性応力解析の研究

段 野 勝^{*}・西 田 常 夫^{**}

Studies on the Photoelastic Stress Analysis by Gelatine Jelly Materials

Masaru DANNO, Tsuneo NISHIDA

(Received Feb. 9, 1967)

Gelatine jelly is a high photoelastic sensitive materials and used as the stress analysis in the gravity field. In this paper, we discussed the photoelastic properties of the gelatine jelly which is prepared from the gelatine, glyceline and water. The gelatine weight percentages are selected three steps, that is 20%, 30% and 40%. As the results, the suitable condition on this experiments was found that the gelatine was prepared to 20% and surrounding temperature was kept at 20°C.

Considering the results described above, we carried out the experimental stress analysis in the several models, whose shapes represented the slope of the mountain and the valley. From these experiments, it was obtained that the direction of one of the principal stress deviated a little toward the slope and that the magnitude of the greatest principal stress was considerably smaller than the product of the specific gravity of the ground and the vertical depth from the summits.

1 緒 言

ゼラチンゼリーは光弾性感度の高い模型材料で、自重によって生ずる構造物の各部の応力の様子などを調べるのによく利用される。このように自重によって生ずる内部応力の実験的解析には便利な、容易に入手し易い光弾性材料であるが、欠点としてはゼラチンや水の配合比を厳重に一定に保って試料を整形しても、その時の気温や湿度の影響を大きく受けて性質が著しく変化し、また試料整形後の経過時間の大小によっても著しく大きい性質の変化を受けることである。このような周囲温度の影響や経過時間の影響について高分子論的な立場やレオロジー的な面から二、三の研究が行なわれている¹⁾が未だ十分明らかにされていない。したがってゼラチンゼリーを用いた光弾性実験を行なう際は、模型実験を行なう直前に必ず感度試験

を行ない、しかも模型実験に長時間を要した場合は再度感度試験を行ない、感度の変化の有無を検定する必要がある。

筆者はこれらの点に鑑み、ゼラチンゼリーの光弾性の性質について種々のゼラチン濃度、温度および経過時間、などについて基礎試験を実施し、ある程度基礎的性質を明らかにすることができた。しかし湿度の影響についてはまだ十分明らかにするまでには至らなかった。

つぎに上記の基礎試験結果を考慮しながら、自重による内部応力の解析法をも二、三の観点から検討を加え、実際の応用例として地型を模倣した二、三の形状のゼラチン模型を作成し、内部の応力分布の様子を実験的に解析した結果、このような場合の主応力の方向や大きさの様子を知ることができた。

* 助教授 ** 研究生

2 材料の基礎的性質

模型実験に先立って、まず材料の力学的、光弾性的性質を調査した。まず材料の光弾性感度 α (cm/kg) については、任意の一点の縞次数を n , 主応力差を $\sigma_1 - \sigma_2$ (kg/cm²) とすれば次式で与えられる。

$$\alpha = n/t(\sigma_1 - \sigma_2) \quad \dots\dots\dots(1)$$

普通光弾性感度を調べるには模型と同じ材料で角棒を作り、単純曲げ試験を行なうか、単純引張または圧縮試験により行なうが、ゼラチンゼリーの光弾性感度は模型の長方形の一部分を利用し、自重によって生ずる等色線縞の次数 n を観測し、この等色線縞の生じている点までの表面からの深さに材料の比重をかけ、その点の主応力 σ_1 ($\sigma_2 = 0$) を求め、(1) 式により計算する。あるいは上記の試料の表面に等分布荷重をかけ単軸圧縮を行なうことにより (1) を利用して求めてもよい。またこのような試験が難しいときは次のような方法が便利である。すなわち、模型を作る前に模型板の水平な表面の長さ $2a$ cm の範囲に図1に示すように

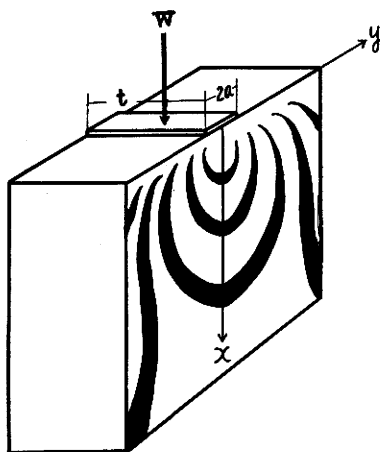


図1 感度試験

t cm の厚さ一ばいに様に分布する W kg の荷重をかけ光弾性装置により応力模様を観察して、感度試験を実施する。

いま図1に示すように載荷面の中央を原点とし、鉛直下方に x 軸をとり、 x 軸上の x の座標をもつ点の縞次数を n とすれば、弾性理論によってこの点の主応力差を求めることができるから、これと(1)式の関係を用いて、光弾性感度 α は次のように表わすことができる。²⁾

$$\alpha = \pi n(a^2 + x^2)/2xW \quad \dots\dots\dots(2)$$

(2)式を利用して、光弾性感度を決定するのである。

しかしこのような方法で光弾性感度を決定するにはさきにも述べたように途中に弾性理論の導入があるか

ら、ゼラチンゼリーは完全弾性体であることが必要であり、また応力と縞次数の間には(1)式を満足するような直線比例関係がなければならない。そこでこのような基礎的条件について調べた結果から述べよう。

模型材料であるゼラチンゼリーはゼラチン(野州化学)20%, グリセリン13%, 水67%の重量比で3者を配合したものを標準としている。ゼラチンゼリーの模型を作るにはこれを加熱溶融した後、約40°Cに冷却し、離型済として機械グリス油を型枠内面に十分塗布してこれに流し込み、固くなった後型枠を取り外す。グリセリンはゼリーの弾性率を高め、乾燥を防ぐために配合している。なお上のようなゼラチンの標準配合比では夏期などは、ゼラチンゼリーが軟弱で自立させることができず、ゼラチンの重量パーセントを増加して固くしなければならなかった。そこでこのような場合の力学的、光弾性的性質をも実験的に調べた。

そこでゼラチンの濃度20%, 30%, 40%の3種類についてベークライト板を型枠として10×10×5 cmの角型試験片を作り、単軸圧縮試験によってこれらの関係を調べた結果は図2および図3に示すようで、応力と歪および応力と縞次数との間にはほぼ直線関係が成立することが認められた。

なお、この圧縮試験においては、試験片の底面にガラス板を置きこの上に充分水を流し、試験片の底面とガラス板との間のすべりをよくし、更に試験片の上面にもガラス板を置き、この間にも水を流しすべりをよくするようにして、上部のガラス板の中央に載荷して圧縮試験を行なった。このとき歪は測微顕微鏡によって測

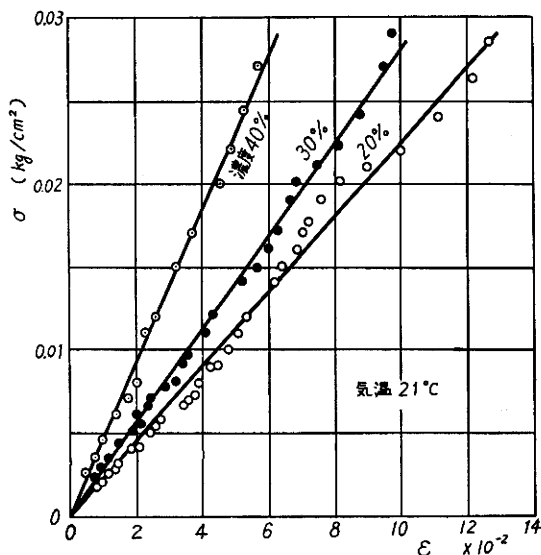


図2 応力とひずみの関係

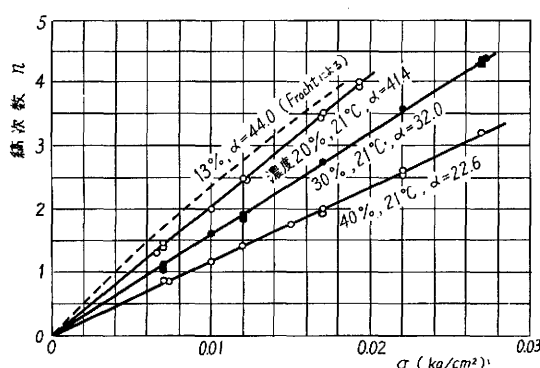


図3 応力と繰り数の関係

定し、試験片が単純圧縮状態にあることが重要な条件となるので、これは光弾性縞模様から判断するとともに同時に繰り数の観測も行なった。

参考のため Frocht の行なった実験結果⁸⁾ を使用し単位を合わせて図3中に作図しておいた。

この結果から予想と反対にゼラチンの濃度の低いほど光弾性感度は高くなっている。また濃度が高くなると弾性定数は大きくなっているが、この点はよく理解できるところである。

つぎに同じ濃度でも温度が高くなると軟弱となる。弾性定数 E を一応硬さの尺度と考え、 E と温度との関係を示せば第4図のようである。このように濃度が高くなると弾性定数の温度依存性は大きくなっており実際上、濃度20%、温度30°C付近では融解点に近く型状を保って自立することは不可能であった。

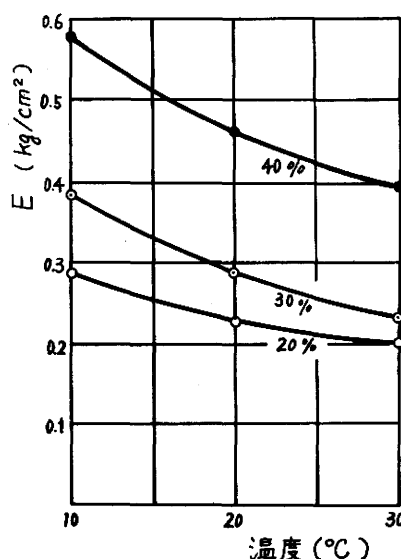


図4 縦弾性係数と温度との関係

なおその他、同じ濃度で、温度が上昇すると光弾性感度は幾分上昇することが認められた。われわれの実験した範囲では、実験の標準を一応ゼラチン濃度20% 温度20°Cとしたが、上に述べたように濃度、温度、湿度、模型整形後の時間などによる力学的光弾性的依存性は大きく、複雑である。そこで光弾性感度の濃度や温度による挙動をまとめて表わすと第1表のようになる。

表1 光弾性感度の温度と濃度の関係

温度上昇	光弾性感度 α (cm/kg) 上昇	約 0.3/°C
濃度上昇	〃 低下	約 0.94/%

標準試料：20%、21°C $\alpha=41.4$

すなわち温度上昇によって光弾性感度 α は1°C 当り約0.3cm/kg上昇し、濃度は1%当りの上昇で約0.94低下する。これらのことを平易に表現すれば、濃度が低くなれば軟弱となるので結局ゼラチンゼリーの場合軟弱になれば光弾性感度は上昇するものと考えても差支えないようである。

以上を要するに模型実験においては濃度20%、20°C付近で実験することが望ましいが、夏期にはこの濃度ではゼラチンゼリーが軟弱で、試料を自立させることはできない。したがって濃度を高める必要に迫られる。この場合いく分光弾性感度は低下し、透明度も減少することはまぬがれ得ない。

なおその他濃度や、温度の条件を同じくしても、試料整形後の経過時間でかなり光弾性感度が変化する。また湿度の影響も可成り受けるようで、これらを十分解明することはできなかった。したがって一応の結論としては、たえず感度変化の有無に注意しなければ正確な実測は期し難い。

3 模型実験

3.1 模型の製作

模型としては、図8、9に示すようなA型、B型の2種類とし、A型はV型の谷のある地形を想定し、B型は一つの斜面を有する地形を想定している。このような地形の内部の主応力の大きさや方向を決定するのが本章の目的である。そこでまず模型の作製について述べる。

模型は厚いほど高い次数の応力縞が現われるが、透明度が低下するので限度があり、ここでは模型の厚さは6cmとしている。模型板を作る型枠の内法は40cm×34cm×6cmで、型枠の側板はアクリル酸樹脂で、それ以外の部分はベークライトでできており、自由に取外

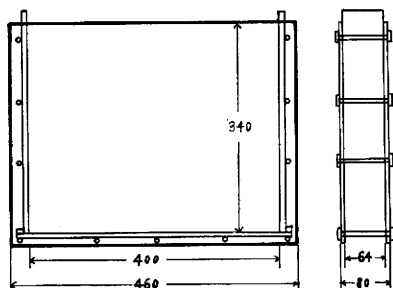


図5 型枠の構造

しできるようになっている。図5は型枠の構造と主要寸法を示したもので、離型剤として前述と同様に機械グリスを使用している。この型枠に熔融ゼラチンを流し込むのであるが、その時に模型上の応力を測定しようとする位置にあらかじめ直径7 cm、長さ6 cmのガラス管にバネを通し、この力によって一時的にこれを側壁に垂直に当てがって保持し、熔融ゼラチンを流し込んで模型板を作り、これを型枠から取出した後所要の形状の模型を作成した。このガラス管にも後で抜き取りを容易にするためグリス油を塗っている。応力を測定しようとするときは、測定すべき点のガラス管を抜き取って小さな円孔をあけ、応力集中を生じさせ、その結果円孔周辺に現われる応力模様を観察して主応力の大きさおよび方向を決定するのである。この応力を測定するための円孔は、その周りの応力集中が互に影響し合わないよう観測の都度、測定点だけガラス管を抜き取って円孔をあけ観測が終わればその都度静かに元のようにガラス管をはめ込むようにした。図8、9に示したA, B, C……は応力測定のための円孔の位置を表わしている。

3・2 円孔を利用する主応力の決定法

模型内の任意の点の主応力差は等色線実験によりこ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{q}{2} \left\{ 1 - \frac{r_1^2}{r^2} - \left(1 - 4 \frac{r_1^2}{r^2} + 3 \frac{r_1^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right\} \\ &\quad - \frac{p}{2} \left\{ 1 - \frac{r_1^2}{r^2} + \left(1 - 4 \frac{r_1^2}{r^2} + 3 \frac{r_1^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_\theta &= \frac{q}{2} \left\{ 1 + \frac{r_1^2}{r^2} + \left(1 + 3 \frac{r_1^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right\} - \frac{p}{2} \left\{ 1 + \frac{r_1^2}{r^2} - \left(1 + 3 \frac{r_1^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right\} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{q}{2} \left(1 + 2 \frac{r_1^2}{r^2} - 3 \frac{r_1^4}{r^4} \right) \sin 2\theta - \frac{p}{2} \left(1 + 2 \frac{r_1^2}{r^2} - 3 \frac{r_1^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

また主応力差は次式で与えられる。

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \left\{ (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(3)$$

(2), (3)の関係から

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \left\{ (q-p)^2 K^2 + (q+p)^2 (1-2K+3K^2)^2 \cos^2 2\theta \right. \\ &\quad \left. + 2K(q^2-p^2)(1-2K+3K^2) \cos 2\theta + (q-p)^2 (1+2K-3K^2)^2 \sin^2 2\theta \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \dots\dots\dots(4)$$

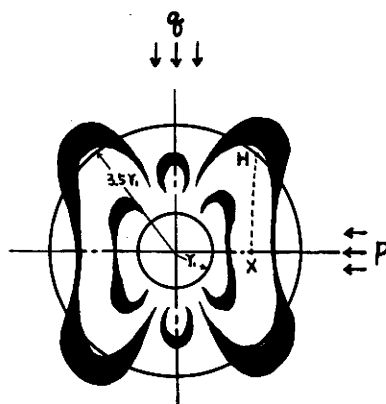


図6

れを求めることができるが、主応力の方向や2つの主応力の大きさを別々に求めるには等傾線実験が必要でこの場合等傾線を求めることは、すこぶる困難であり仮りに等傾線をスケッチしたとしても等傾線が不明瞭で十分な精度を望み得ない。そこで先きに述べたように物体の寸法に比して十分小さな直径の円孔を物体表面に垂直にうがち、この円孔の周辺に応力集中を起させ、これに応じて生ずる高次の等色線縞から主応力の大きさおよび方向を決定することとした。

まず主応力の方向については、円孔の中心における円孔のない場合の主応力を p, q とすると、円孔がけられたときは主応力の方向はその周辺に生じた応力模様の対称軸の方向と一致するから、この関係を利用して、方向を簡単に決定することができる。

つぎに p, q の個々の大きさを決定する方法を述べよう。いま半径 r_1 の円孔の中心を原点とし、図6のように p 軸を原線とする極座標 (r, θ) に関する応力成分をそれぞれ、 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ で表わすと弾性理論⁴⁾によりこれからは次式で表わされる。

ただし $K=(r_1/r)^2$ である。

そこで円孔の中心から半径 $3.5r_1$ の円を描き、その円上の最高次の繰次数のあらわれている点をHとし、それと同次の繰が x 軸すなわち p 軸と交わる点をXとする。円の大きさを $3.5r_1$ としたのは後で述べる実験結果から、最高次数の繰のある点Hが選定し易いからであって、特に数字に大きな意味は持っていない。

次に点Hは応力繰の次数の最も高い点、すなわち $\sigma_1 - \sigma_2$ の最も大きい点と仮定したから、この点の位置を求めるには(4)を θ について偏微分し、これを0とおいて解けばよい。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\sigma_1 - \sigma_2) = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

(5)に(4)の関係をを用いて解けば、

$$\cos 2\theta = (q+p)(1-2K+3K^2)/4(2-3K)(q-p) \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここで $K=(r_1/r)^2=(1/3.5)^2$ であり、 p/q の値を実際上最もおこり得る値すなわち 0, 0.1, 0.2 および 0.3 の4つの場合について(6)式によりそれぞれの θ を計算して点Hの位置を決定し、 p/q のそれぞれの値について(4)に代入し、しかも前述の $K=(1/3.5)^2$ の関係も用いて $(\sigma_1 - \sigma_2)/q$ の値を決定することができる。

つぎに点Xの位置については、この点は x 軸上にあるから $\theta = 0$ であり、この点においては $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_1 - \sigma_2$ となるから、

$$\sigma_1 - \sigma_2 = q(-3K^2 + K - 1) + p(3K^2 - 3K + 1) \quad \dots\dots\dots(7)$$

$(\sigma_1 - \sigma_2)/q$ はさきに述べたように決定できているからこれと(7)の関係から r/r_1 の値が p/q や $(\sigma_1 - \sigma_2)/q$ の値に対応して求めることができ、これらの関係を図示すれば図7が得られる。

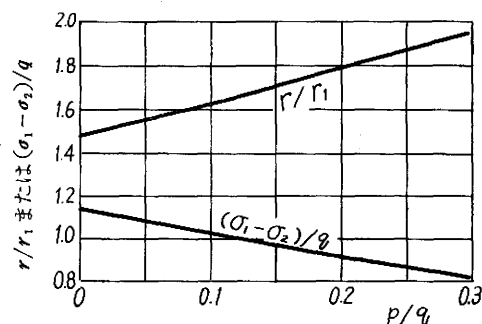


図7

図7を利用して、実際観測された応力繰から、円孔のない場合の p , q の値を求めるのであるが、その方法は次のようにする。すなわち $3.5r_1$ の円周上の繰次

数の最も高い点Hを求め、これと同次数の繰をたどり x 軸との交点Xの位置を求め、この位置の r/r_1 を決定する。 r/r_1 の値が決まれば図7から p/q の値と $(\sigma_1 - \sigma_2)/q$ の値が決まる。また $\sigma_1 - \sigma_2$ は点Hの繰次数とその材料の光弾性感度とから求まるから、 q の値を決定することができる。 p の値は上に述べたように p/q の値が決まっているから、ただちに求めることができ、このようにして二つの主応力の大きさが決定できるのである。

3.3 主応力決定法の実験的検討

前節において、小さい円孔を利用する主応力の方向および大きさの決定法について述べたが、この方法の精度を調べるため、つぎのような基礎的実験を行なった。

表2 種々の方法によって求めた $\sigma_1 - \sigma_2$ の値の比較

解析方法	主応力差 $\sigma_1 - \sigma_2$ (g/cm ²)		
	自重のみ	W=200g	W=500g
方法Ⅰ	7.92	—	—
方法Ⅱ	8.03	16.02	19.71
方法Ⅲ		15.17	18.64
光弾性感度 α (cm/kg)	45.7	46.2	46.9

すなわち巾380mm、高さ160mm、厚さ60mmの長方形試験片を作り表2に示す3通りの方法で $\sigma_1 - \sigma_2$ を求め、これを比較した。まず中央に前述の方法で小さい円孔をあけ、円孔のない場合の、この点における主応力 σ_1 および σ_2 を図7を利用して求め、この結果を方法Ⅱの欄に示した。また $\sigma_1 - \sigma_2$ はこの方法とは別に模型表面からこの点までの深さ(80mm)と、ゼラチンゼリーの比重量とから簡単に計算することができるから、この値を方法Ⅰの欄に示した。ただしこの場合 $\sigma_2 = 0$ である。更に図1に示すような部分的等分布荷重をこの試験片に加えることによって任意の点における $\sigma_1 - \sigma_2$ を弾性理論によって求めることができるので、この計算値を同表に方法Ⅲとして示した。このようにして3通りの方法で求めた値はほぼ10%以内の誤差であった。なお方法ⅠおよびⅢから光弾性感度 α を求めることもできるので、この値を最下欄に示した。この α の値は図3の値とくい違っているが、これは試料整形後の経過時間や、湿度、温度などをさきの実験と正しく合わせることができなかったことに原因しているものと思われる。

4 模型実験結果

斜面や谷型を想定したA型およびB型模型について内部の主応力の大きさと方向を求めるため、さきに述べた型枠を用いて所要の模型を作り、これを自立させ、光弾性装置の円偏光器により自重による内部応力によって生ずる等色線縞模様を観測し、写真撮影した。撮影には35mmカメラを使用したが高いため撮影すべき測定点を数箇所に分け、模型を円偏光視野内で移動させることにより、その都度撮影をくり返し、このようにしてでき上がった数枚の写真をつなぎ合わせて一つの模型の等色線写真とした。この写真の1例を写

真1に示す。

各点の主応力の大きさや方向は円孔周辺に生じた等色線の縞模様から2, 3節で述べた方法によって求めた。

またこの方法とは別に、すなわち円孔には無関係に生じた自重による等色線模様から主応力差を求め、両者を比較したところ、これらはよく一致することが認められた。

図8, 図9はA型およびB型模型の内部の各点に生じる主応力の大きさおよび方向を示した図で、この中に示した主応力の大きさは、絶対値ではなく、模型材

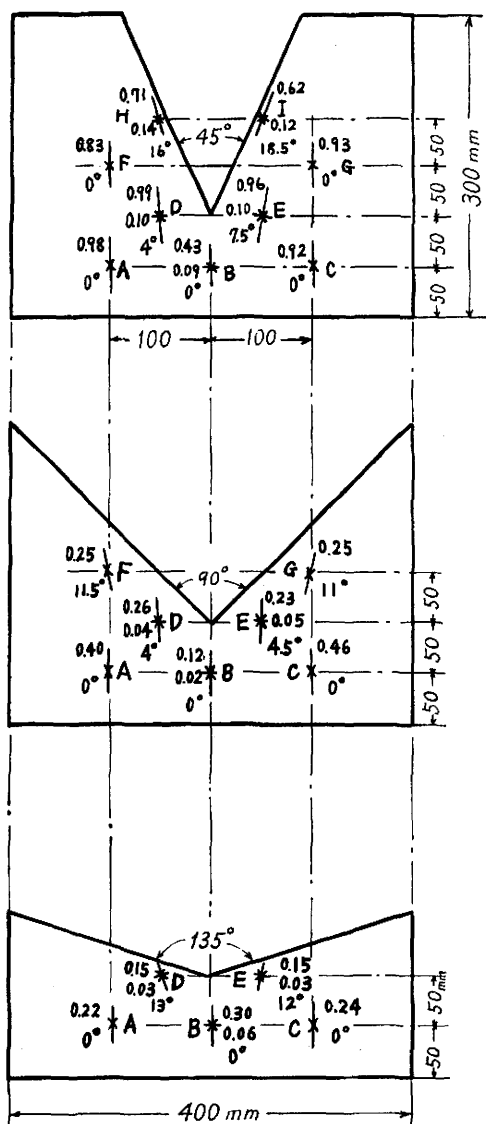


図8 A型模型内の主応力の大きさと方向

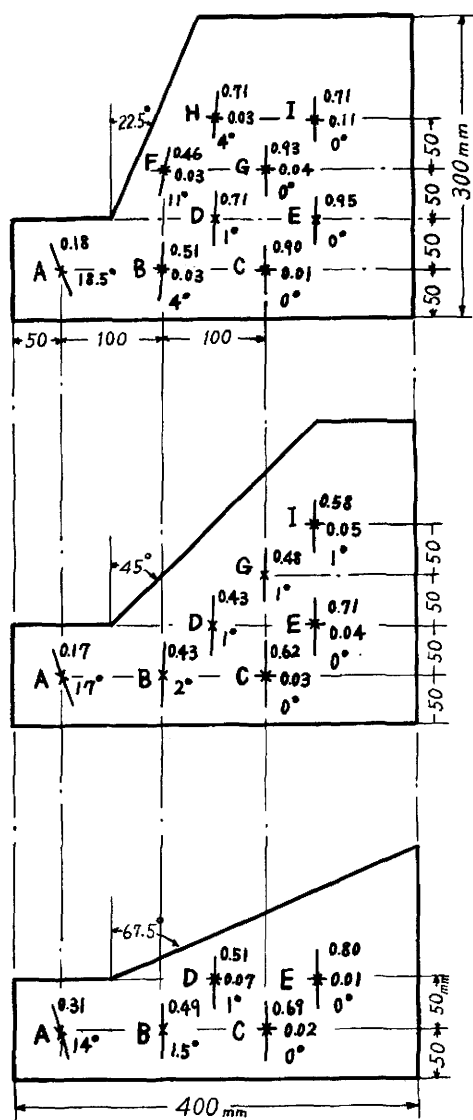


図9 B型模型内の主応力の大きさと方向

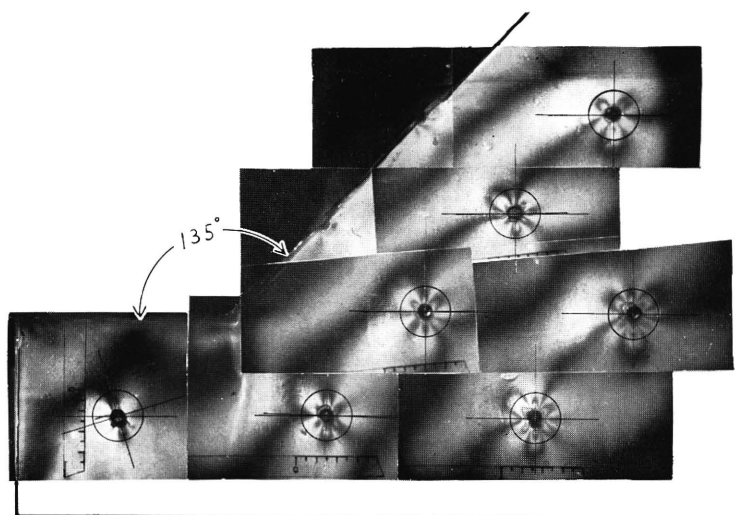


写真 1 模型の等色線写真の一例

料の比重 γ と、頂点からの高低差 Z との積 γZ の倍数として示した。模型の形状の種類が少ないので形状と応力の相関関係を見出すことはできなかったが、およその定性的な傾向を結論すればつぎのようである。

すなわち模型の表面が水平面であれば、理論的にどの点の主応力も方向は鉛直と水平で、鉛直の主応力の大きさは γZ に等しいはずであり、また水平方向の主応力の大きさは零であるはずである。これに対し本実験に用いた形状の地型の場合は、大きい方の主応力の方向は鉛直より僅か斜面のかたむぎの方向に片寄る。この傾向は斜面に近い点ほどこの傾向は大となる。また主応力の大きさについては γZ よりかなり小さいことが分った。また主応力はすべて圧縮応力を示しており傾斜の急な斜面をもつ模型の内部では γZ の 50%~70%程度であった。また模型の側方は自由であるため水平方向の主応力は非常に小さく、実用上は各点の応力状態は近似的に単軸圧縮応力状態にあるといて差支えないようである。

5 結 言

地型を模倣した地下内部の応力状態を知る目的で、ゼラチンゼリーを模型材料に使った光弾性実験について述べた。まずこれに必要なゼラチンゼリーの光弾性的、力学的な基礎的性質を調査し、ゼラチンゼリーはほぼ完全弾性体と考えてよく、Brewster の法則が成立するものと考えて差支えないことが分った。しかしこの模型材料は夏期においてはゼラチン 20% の模型で

は軟弱で、これを自立させることができないので、濃度を高める必要がある。この場合光弾性感は幾分低下し、透明度が悪くなる。したがって最も良い実験条件はゼラチン濃度 20% で 20°C の温度が適当であることが結論された。

また自重によって生ずる等色線縞次数は少なく、またたとえこの縞次数から応力を求めたとしても主応力差のみしか求められない。そこで模型表面に垂直に小さい円孔をあけ、この円孔周辺に生ずる応力集中によ

る縞模様から応力を求める方法を利用すると、円孔のない場合の主応力の方向と 2 つの応力の大きさを別々に知ることができる。

このようにして求めた主応力は、自重によって簡単に求めた実際に近い応力と 10% 以内の精度でよく合致することが認められた。そこでこの方法で 2, 3 の傾きの斜面をもつ模型と V 型の斜面をもつ模型とについて内部の主応力の大きさや方向を求めた。このようにして求めた主応力の大きさと模型の形状との相関関係まで得ることは模型の種類がまだ少ないため明らかにすることはできなかったが、定性的には斜面に近くなる点ほど主応力の方向は斜面の傾きに近くなることが認められた。また水平方向の主応力は非常に小さく応力状態は単軸圧縮状態に近いと考えて差支えなく、その大きさは模型の頂点からの深さに模型の比重重量をかけた値より小さく斜面のかたむぎによって、この値はかなり広い範囲にわたることが明らかとなった。

最後に本研究の遂行に有益な御助言をいただいた京大工学部平松教授、岡助教授に深甚の謝意を表するとともに、実験に協力をいただいた本学卒業生、松尾、寺尾の両氏にも謝意を表する次第である。

また本研究はその一部を昭和 40 年 12 月応用物理学会北陸支部において講演した。

文 献

- 1) 平井, 日本化学雑誌, 74, 348 (1953)
平井・妹尾, 日本化学雑誌, 75, 695 (1954)
R. Richards and others, Exper. Mech. 6, 1 (1966), 30.

- 2) 平松・岡, 水曜会誌, 15, 2 (1963), 57
- 3) M. M. Frocht, photoelasticity, I, (1962), 346, John Wiley & Sons.
- 4) S. Timoshenko and J. N Goodier, Theory of Elasticity, (1951), 80 New York.
(昭和42年2月9日受理)